05 | 概率统计和排队论：做性能工作必须懂的数理基础

2019-12-06 庄振运

性能工程高手课 进入课程 >

讲述：庄振运
时长 15:06　大小 13.84M

你好，我是庄振运。

上一讲我们讲了和性能优化有关的三大基础定律法则。今天我们继续打基础，讲一点统计方面的数理知识，包括重要的**概率统计**和**排队论**。

或许你对概率统计和排队论有点发怵，但这些内容是必须学会的，因为它们很重要。因为它们是性能测试和优化这座高楼大厦的地基。地基打不好，性能测试和优化也不会做得很好。

而且我想强调的是：你完全没有必要惧怕，因为你只需要学习一部分最基础的知识，这些知识对多数人和多数场合大体就够了。还记得上一讲的帕累托法则吗？根据帕累托法则，这一讲的内容或许占不到平时教科书内容的 20%，但却可以覆盖 80% 以上的应用场合。

概率和置信区间

今天的内容我们先从概率和置信区间讲起。

概率（Probability），也称几率和机率，是一个在 0 到 1 之间的实数，是对随机事件发生之可能性的度量。这个你应该都懂，不需要我多说。

但概率论中有一个很重要的定理，叫贝叶斯定理，我们做性能测试和分析中经常需要用到，所以我们稍微讲讲。

贝叶斯定理（Bayes’ theorem）描述的是在已知一些条件下，某事件的发生概率。比如，如果已知某癌症与寿命有关，合理运用贝叶斯定理就可以通过得知某人年龄，来更加准确地计算出他患上该癌症的概率。

具体来讲，对两个事件 A 和 B 而言，“发生事件 A”在“事件 B 发生”的条件下的概率，与“发生事件 B”在“事件 A 发生”的条件下的概率是不一样的。

然而，这两者的发生概率却是有确定的关系的。就是 A 事件发生的概率，乘以 A 事件下 B 事件发生的概率，这个乘积等于 B 事件发生概率乘以 B 事件下 A 发生的概率。听起来有点拗口，可如果用公式来表示的话其实很简单。

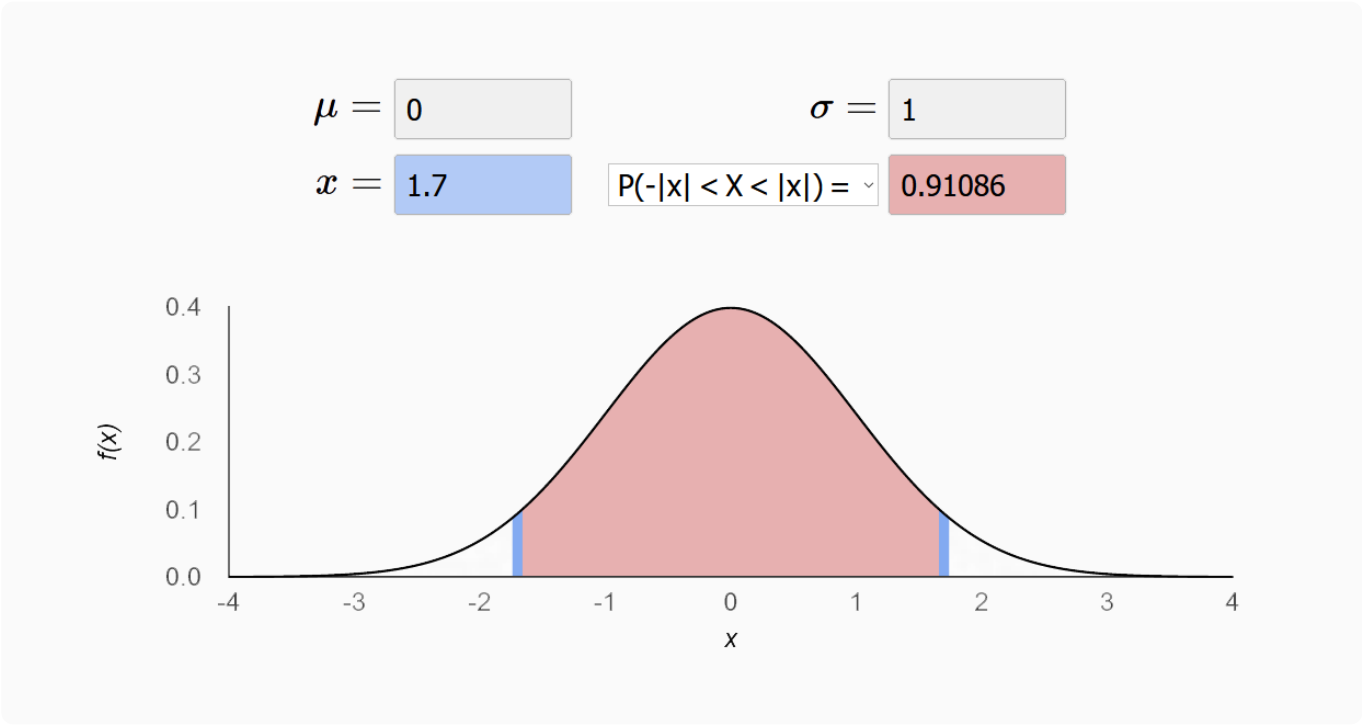
$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

贝叶斯定理的一个用途在于**通过已知的任意三个概率函数推出第四个**。

另外一个重要的概念是置信区间。**置信区间**（Confidence interval，CI）是对产生样本的总体**参数分布**（Parametric Distribution）中的某一个未知参数值，以区间形式给出的估

计。相对于后面我们要讲到的点估计指标（比如均值，中位数等），置信区间蕴含了**估计精确度**的信息。

置信区间是对分布（尤其是正态分布）的一种深入研究。通过对样本的计算，得到对某个总体参数的区间估计，展现为总体参数的真实值有多少概率落在所计算的区间里。比如下图是一个标准正态分布的图，阴影部分显示的是置信区间 [-1.7,1.7]，占了 91% 的概率。



不难理解，置信水平越高，置信区间就会越宽。一般来说，如果需要涵盖绝大多数的情况，置信区间一般会选择 90% 或者 95%。

了解了概率和置信区间，我们下面去看看如何分析大量数据。

数理统计的点估计指标

做性能测试和优化的过程中会产生大量的数据，比如客户请求的吞吐率，请求的延迟等等。获得这些大量数据后，如何分析和理解这些数据就是一门学问了。通常我们需要处理一下这些数据来求得另外的指标，以方便描述和理解。

描述性统计分析是传统数据分析的基础，这个分析过程可以产生一些描述性指标，比如平均值、中位数、最大值、最小值、百分位数等。

这些描述性指标通常也被称为“**点估计**”，相对于前面讲到的置信区间，是用一个样本统计量来估计参数值，比较容易理解。这些点估计指标分别有不同的优点和缺点。

平均值：（Mean，或称均值，平均数）是最常用测度值，它的目的是确定一组数据的均衡点。但不足之处是它容易受极端值影响。比如公司的平均收入，如果有一两个员工有特别高的收入，会把大家的平均收入拉高，就是平时我们经常调侃的“被平均”。

需要注意的是，我们有好几种不同的平均值算法。我们平时比较常用的是算术平均值，就是把 N 个数据相加后的和除以 N。但是还有几种其他计算方法，分别适用不同的情况。比如几何平均数，就是把 N 个数据相乘后的乘积开 N 次方。

中位数（Median，又称中值），将数值集合划分为相等的上下两部分，一般是把数据以升序或降序排列后，处于最中间的数。它的优点是不受极端值的影响，但是如果数据呈现一些特殊的分布，比如二向分布，中位数的表达会受很大的负面影响。

四分位数（Quartile）是把所有数值由小到大排列，并分成四等份，处于三个分割点位置的数值就是四分位数。 从小到大分别叫做第一四分位数，第二四分位数等等。四分位数的优点是简单，固定了三个分割点位置。缺点也正是这几个位置太固定，因此不能更普遍地描述其他位置。

百分位数（Percentile）可以看作是四分位数的扩展，是将一组数据从小到大排序，某一百分位所对应数据的值就称为这一百分位的百分位数，以 Pk 表示第 k 个百分位数。比如常用的百分位数是 P90，P95 等等。百分位数不容易受极端值影响，因为有 100 个位置可以选取，相对四分位数适用范围更广。

几个特殊的百分位数也很有意思，比如 P50 其实就是中位数，P0 其实就是最小值，P100 其实就是最大值。

还要注意的是，面对同一组数据，平均值和中位数以及百分位数这些点估计指标，谁大谁小是不一定的，这取决于这组数据的具体离散程度。

比如，我在面试的时候我经常问来面试的人一个问题，就是平均值和 P99 哪个比较大？答案就是：不确定。

方差 / 标准差（Variance，Standard Variance），描述的是变量的离散程度，也就是该变量离其期望值的距离。

重要的分布模型

以上的几个描述性的**点估计统计指标**很简单，但是描述数据的功能很有限。如果需要更加直观并准确的描述，就需要了解分布模型了。

举例来讲，假设我们有一个系统，观察对客户请求的响应时间。如果面对一万个这样的数据，如何对这个数据集合进行描述呢？这时候用分布模型来描述就很合适。

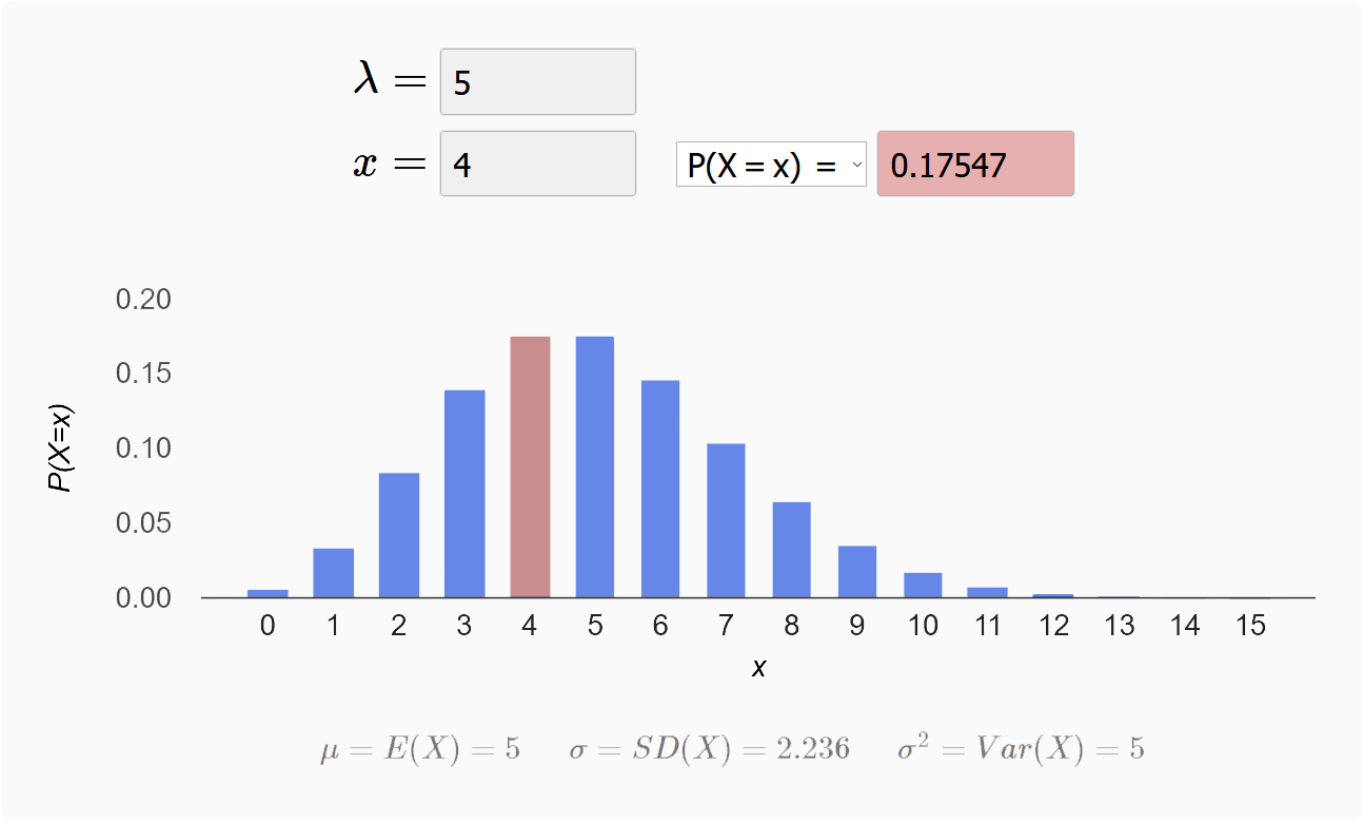
我们简单提一下几个最重要的分布模型，包括泊松分布、二项式分布和正态分布。

泊松分布（Poisson distribution）适合于描述单位时间内随机事件发生的次数的概率分布。如某一服务设施在一定时间内收到的服务请求的次数等。

具体讲，如果随机变量 X 取 0 和一切正整数值，在 n 次独立试验中出现的次数 x 恰为 k 次的概率 P（X=k）就是：

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

公式中λ是单位时间内随机事件的平均发生次数。像下面这个图，表示的就是λ=5 的分布。红色部分是 P(X=4) 的概率，约为 0.17。



当 n 很大，且在一次试验中出现的概率 P 很小时，泊松分布近似二项式分布。

二项分布（Binomial distribution），是 n 个独立的是 / 非试验中成功的次数的离散概率分布。

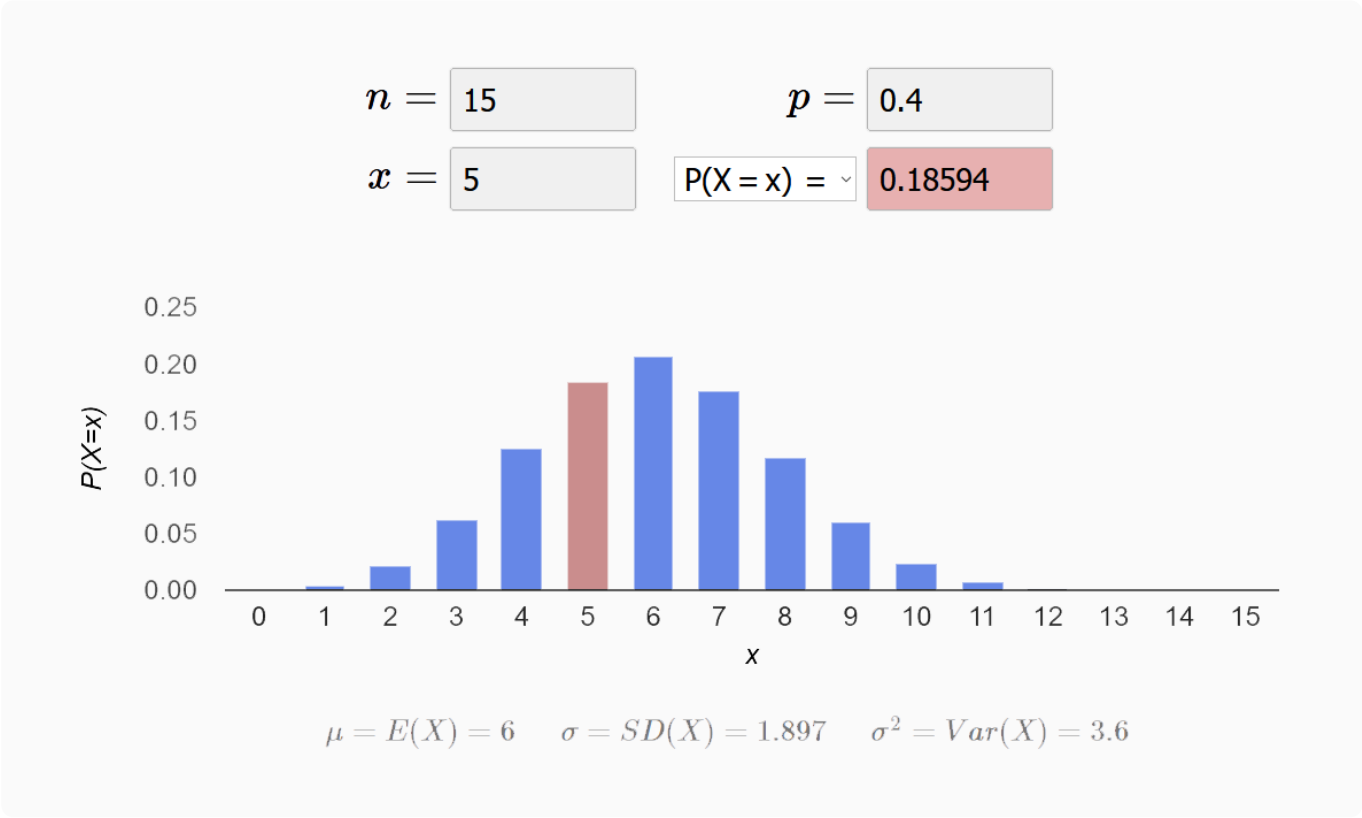
这里通常重复 n 次独立的伯努利试验（Bernoulli trial）。在每次试验中只有两种可能的结果，而且两种结果发生与否互相对立，并且相互独立。也就是说事件发生与否的概率在每一次独立试验中都保持不变，与其它各次试验结果无关。

当试验次数为 1 时，二项分布服从比较简单的 0-1 分布。

在 n 重伯努利试验中，假设一个事件 A 成功的概率是 p, 那么恰好发生 k 次的概率为：

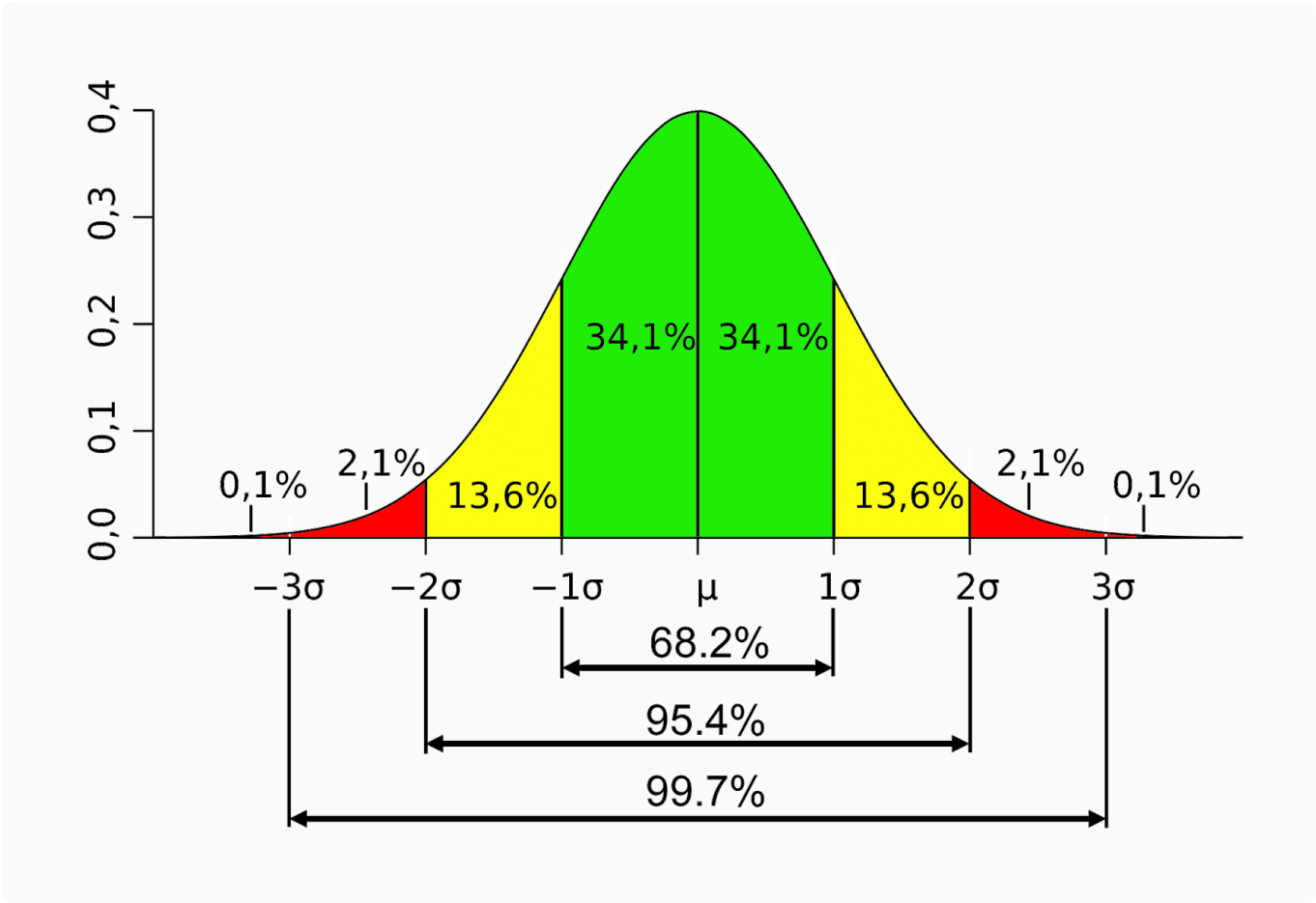
$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

比如下图就是一个二项分布的图，图中红色的是 P(X=5) 的概率，约为 0.18。



正态分布（Normal distribution），也叫高斯分布（Gaussian distribution）。经常用来代表一个不明的随机变量。

正态分布的曲线呈钟型，两头低，中间高，左右对称，因此经常被称之为钟形曲线。比如下图：



一个正态分布往往记为 N(μ，σ^2)。其中的期望值μ决定了其位置，其标准差σ决定了分布的幅度。概率密度函数如下：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

当μ = 0，σ = 1 时的正态分布是标准正态分布。上图就是一个标准正态分布，线段的值代表了置信区间。比如在期望值附近，左右各一个标准差的范围内，差不多可以囊括 68.2% 的概率；各两个标准差的范围内，囊括 95.4% 的概率；各三个标准差的范围内，囊括 99.7% 的概率。

正态分布的重要性在于，大多数我们碰到的未知数据都呈正态分布状。这意味着**我们在不清楚总体分布情况时，可以用正态分布来模拟。**

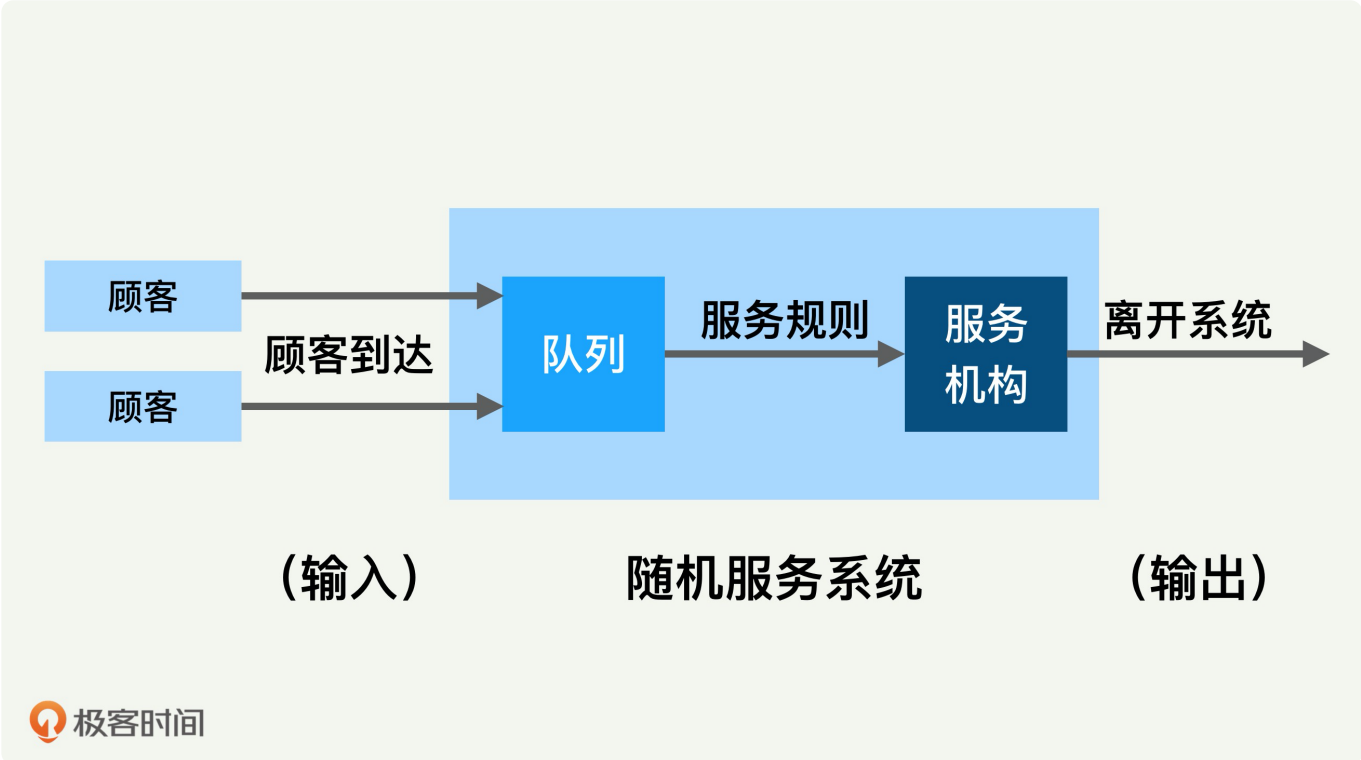
好了，我们这里学习了三个重要分布。如果你看不懂或者记不住这三个分布的公式也没有关系，你只要知道每个分布的大概适应场景就可以了。实际的工作中，很多工具都能帮助我们分析，很少需要我们去具体推导。

排队的理论

上面谈到的三个分布经常被应用到排队理论中，而排队理论在性能工程方面是非常重要的。计算机系统中的很多模块，比如网络数据发送和接收、CPU 的调度、存储 IO、数据库查询处理等等，都是用队列来缓冲请求的，因此排队理论经常被用来做各种性能的建模分析。

排队论（Queuing Theory），也被称为随机服务系统理论。这个理论能帮助我们正确地设计和有效运行各个服务系统，使之发挥最佳效益。

排队论的系统里面有几个重要模块，比如顾客输入过程、队列、排队规则、服务机构等。几个模块之间的关系大体上可以用下面这张图来表示。



主要的输入参数是到达速度、顾客到达分布、排队的规则、服务机构处理速度和处理模型等。

排队系统的输出也有很多的参数，比较重要的是排队长度、等待时间、系统负载水平和空闲率等。所有这些输入、输出参数和我们进行的性能测试和优化都息息相关。

排队的模型有很多，平时我们用得多的有**单队列单服务台**和**多队列多服务台**。系统里面各个模块的模型都可以变化，排队论里面还有很多延伸理论。

总结

要想精通任何一门学问和工作，牢固的基础是必须的。对 IT 工作，包括设计系统、编写程序、系统维护和性能优化而言，牢固的数学基础会使我们的工作如虎添翼。这正如古人赞赏梅花时所说得：“不经一番寒彻骨，怎得梅花扑鼻香“。

我们也常说“根深才能叶茂”，今天讲的内容，包括概率统计和分布模型的知识，都是这样的基础和根基，希望你能牢牢掌握。

思考题

你们公司的系统和提供的服务中，有没有性能方面的指标要求？

这种指标要求是怎么表述的？比如是平均值，还是某些百分位数？

为什么要这样规定指标要求？

欢迎你在留言区分享自己的思考，与我和其他同学一起讨论，也欢迎你把文章分享给自己的朋友。

© 版权归极客邦科技所有，未经许可不得传播售卖。 页面已增加防盗追踪，如有侵权极客邦将依法追究其法律责任。

上一篇　04 | 性能工程三定律：IT业和性能优化工作的“法律法规”

下一篇　06 | 性能数据的分析：如何从大量数据中看出想要的信号?

精选留言 (9)

写留言

许童童
2019-12-06

老师讲得真好，懂了理论，我们做起性能分析才能有理可依，不然就像盲人摸象，给你测试出来的数据，你也不知道如何去分析，从而解决性能问题。

展开

3

虹桥念苏
2019-12-07

如果不是常量值的话，一般P99要比平均值大，但不一定比中位数大，p99这种通常用于分析latency分布情况

1

张祺

2019-12-08

请问老师文章中二项分布，泊松分布，根据公式输入的值，自动画出图形的是什么工具呀?

1

glutton

2019-12-08

之前只是知道tp99这种分位值比算数平均值更有参考价值，但是完全不知道跟概率论的关系，看到了理论依据，底气更足了，哈哈
排队论这里，结合日常场景的话，线程池、连接池都是典型的应用场景，线程池大小、等待队列长度、等待超时时常这些值都影响着性能，这样理解对吧?

展开

乘坐Tornado的线程魔...

2019-12-08

请教下，二项分布时，中位数的表达会受很大的负面影响。原因是?

西西弗与卡夫卡

2019-12-07

基础是武器，思考是动力。

展开

Q

2019-12-06

懵逼了~~ 数学一直是短板。。。 求老师介绍些概率统计学方面的书籍研读补习下。。

> 作者回复: 这个领域中文的书我也不了解情况，你可以试试搜索一下（比如网上书店），看看评价。尽量找简单易懂的看，因为咱们不是为了研究那些领域，就是应用。

1

Jxin

2019-12-06

1.全篇看着眼熟，看完还是停留在眼熟。概率论早忘光了。

2.今天这篇不好记忆，纯理论定义本身是比较枯燥的，在这么小的篇幅里更像是过眼云

烟。我们因为价值而去学习，并不会因为难而不学。但如何易学还是要讲究下的，最直观的莫过于show me the code。所以将对应概率理论结合具体应用场景来讲，相辅相成，...

展开

作者回复: 理解，就这篇比较难点，保证后面很少这样的数学。：）

黑崽

2019-12-06

概率论学完十几年了，只对正态分布有些印象，其他不记得了。看了文章说的也似懂非懂，老师是否会在后面的课程中，结合具体实践讲一讲？

展开

作者回复: 概率论这门课是比较难；基本的知识有时候会在工作中用到得。不过只要你学过，捡起来很容易的。
具体工作中，面对很多变量的根因分析时，一般会用到。还有就是做预测时候，因为有不确定性，所以置信区间这些概念要懂，比如90% vs. 50% confidence。

1